



МЕТОД ОЦЕНКИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОТСЧЕТОВ МНОГОМЕРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

С. Ф. Свинын¹, Г. М. Тригубович², А. В. Чернышев², В. Ф. Свинын³

¹Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия; ²ЗАО «Аэрогеофизическая разведка», Новосибирск, Россия; ³Сибирский НИИ геологии, геофизики и минерального сырья (СНИИГГиМС), Новосибирск, Россия

Приведено теоретическое обоснование и описана экспериментальная проверка одного из подходов к оценке необходимой и достаточной пространственной плотности сети наблюдений в геофизике. Результаты позволяют сделать количественные оценки сравнительной эффективности восстановления сигналов при различной густоте сети наблюдений для двумерного случая. В рамках предложенного подхода к обработке сигналов, который может быть назван энергетическим, в отличие от более распространенного амплитудного, вычисляется двумерный спектр суммарной энергии сигнала на пространственной сетке наблюдений при различных дискретизациях. Это дает возможность выбрать оптимальный вариант пространственной сети по введенному критерию энергии. Метод позволяет сделать это для обеих пространственных координат отдельно. Применимость предложенного подхода рассматривается для методов электроразведки воздушного и наземного базирования на ограниченном числе моделей и фактических данных. Результаты дают основание для дальнейших исследований в указанном направлении.

Ключевые слова: сетка наблюдений, шаг дискретизации, пространственная плотность наблюдений, геофизическая разведка, теория обработки данных, сплайн-функции, вейвлеты, энергетический подход.

METHOD FOR EVALUATING THE RATIONAL DENSITY OF MULTIDIMENSIONAL FINITE ENERGY GEOPHYSICAL SIGNALS

S. F. Svinyin¹, G. M. Trigubovich², A. V. Chernyshev², V. F. Svinyin³

¹Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia; ²Aerogeofizicheskaya razvedka, Novosibirsk, Russia; ³Siberian Research Institute of Geology, Geophysics and Mineral Resources, Novosibirsk, Russia

The article is devoted to the theoretical justification of one of the methods for processing geophysical exploration data (using aeromagnetic observations as an example), the results of which allow us to make quantitative estimates of the comparative efficiency of signal reconstruction at different densities of the observation network for a two-dimensional case. Within this approach, in the theory of signal processing (which can be called an energy one in contrast to the more common an amplitude one), a two-dimensional spectrum of the total signal energy on a spatial grid is calculated at various sampling intervals, which makes it possible to choose the optimal variant of network density according to the accuracy/cost criterion. The method will allow this to be done separately for both spatial coordinates. The applicability of the method for various types of electrical exploration is considered presumably on a limited number of models and evidence, and the results provide the basis for further research in this direction.

Keywords: airborne geophysical exploration, data processing theory, spline functions, wavelets, energy approach, observation network, sampling interval.

DOI 10.20403/2078-0575-2019-3-72-79

Постановка задачи

Главным критерием эффективности геофизических исследований с точки зрения выбора масштаба поисково-оценочных исследований в рамках существующих физических предпосылок является контрастность, характеризующая отношение сигнал/помеха и ширину аномалии. При выборе методики исследований всегда возникает вопрос: что целесообразнее – мелкомасштабная высокоточная съемка или измерения с высокой пространственной плотностью в надежде получить более контрастный отклик от поискового объекта. До настоящего времени не существует общепринятых и теоретически обоснованных количественных методов такой оценки.

В предлагаемой статье обоснована возможность использования такой оценки на основе оригинального подхода в теории обработки сигналов

(который может быть назван энергетическим в отличие от более распространенного амплитудного), разработанного одним из авторов статьи [6]. Основу метода составляет вычисление двумерного спектра суммарной энергии сигнала на пространственной сетке наблюдений при различных шагах дискретизации, что дает возможность выбрать оптимальный вариант густоты сети по критерию точность/затраты. Метод позволяет сделать это для обеих пространственных координат отдельно. Его применимость для электроразведки рассматривается на ограниченном числе моделей и фактических данных, и результаты дают основание для дальнейших исследований. В качестве проверки эффективности выдвинутого критерия использован метод прямого физико-математического моделирования для конкретно установленной поисковой модели.

Теория метода

Более 100 лет многие математики, физики и инженеры занимаются изучением соотношения свойств непрерывности и дискретности сигналов от объектов реального физического мира, поступающих на вход приборов и систем. Согласно принципу неопределенности В. Гейзенберга, открытому в 1927 г. применительно к частицам микромира, не могут быть одновременно точно измерены координаты частицы и ее скорость (импульс количества движения) [10]. В общей теории связи в 1930–1940-х гг. исследовался аналогичный принцип, названный соотношением неопределенности для сигналов – функций времени $f(t)$ и отражавший тот факт, что не могут быть одновременно точно измерены длительность сигнала и ширина полосы его спектра. Эти исследования обобщены в книге акад. А. А. Харкевича [7]. В современной математике данное соотношение приводится в виде неравенства [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{4} \|f\|^4, \quad (1)$$

где ω – круговая частота сигнала; $F(\omega)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$, отражающее динамические свойства сигнала; $\|f\|$ – норма функции $f(t)$ в пространстве L^2 .

В первой трети XX в. аналитически решалась задача точного восстановления целых функций по информации о них, заданной только в дискретных узлах независимой переменной t . Были доказаны теоремы [8, 12], утверждавшие, что можно абсолютно точно восстановить функцию путем разложения ее в бесконечный так называемый кардинальный ряд вида

$$f(t) = R(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(ih) \frac{\sin(t-ih)}{h}, \quad h > 0, \quad (2)$$

где i – текущий номер члена ряда R ; h – расстояния между дискретными узлами аргумента.

Дробная часть функции в формуле (2) получила

обозначение $\text{sinc}(t) = \sin(t-ih)/h$.

Реальные сигналы имеют конечную длительность, что порождает ошибки при восстановлении в соответствии с формулой (2). Ошибки могут быть сведены к минимуму, если при восстановлении сигналов воспользоваться положениями теории функций с конечной энергией (мощностью) P . Для функций одного аргумента это условие формулируется

в виде $P = \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, где $a < \infty$; $b < \infty$; $|f|$ – модуль

функции, и теория для функции, заданной на компактном носителе x , дает возможность представить ее в виде конечной суммы финитных базисных функций. К таким функциям относятся базисные сплайны [4], сплайн-вейвлеты [9] и вейвлеты [1].

В частности, базисные сплайны (В-сплайны) представляют собой финитные кусочно-полиномиальные функции целой степени $m \geq 0$, определенные на компактных носителях. Они линейно независимы на (a, b) и отличаются от нуля на интервалах длиной $l = (m+1)h$. Свойство ортогональности необязательно, но такие базисы порождают ортонормированные системы сплайн-вейвлетов и часто называются полуортогональными [9].

Для аппроксимации функции $f(t)$ класса L^2 (интегрируемого с квадратом) последовательностью В-сплайнов (рис. 1) должны быть заданы $2m$ дополнительных узлов за пределами интервала (a, b) , и тогда функция может быть представлена в виде суммы

$$f(t) \cong \sum_{i=-m}^{n+m-1} b_i B_{m,i}(t),$$

где b_i – коэффициенты разложения функции в ряд по В-сплайнам; n – число отсчетов функции на отрезке (a, b) .

В-сплайны степеней $m \geq 1$ могут быть построены по рекуррентной формуле, содержащей сплайны более низких степеней (рис. 1):

$$B_m(t) = B_{m-1}(t)B_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{m-1}(\tau)B_0(t-\tau)d\tau.$$

В зависимости от метода аппроксимации сплайны делятся на интерполяционные и сглаживающие. В общем случае для вычисления

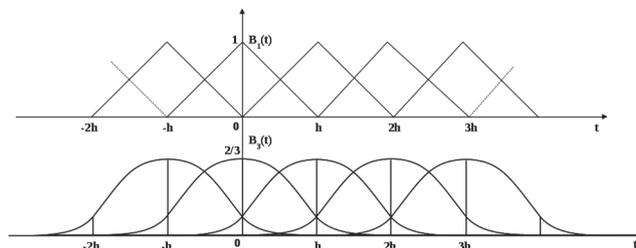


Рис. 1. Графики последовательностей В-сплайнов нечетных степеней $m = 1$ и $m = 3$

b -коэффициентов интерполяционных сплайнов требуется решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Наряду с данным вариантом для получения этих коэффициентов широко применяются так называемые локальные сглаживающие формулы фильтрации, не требующие решения СЛАУ [2, 4]. В итоге значительно сокращается время цифровой обработки последовательности отсчетов, причем точность результата остается того же порядка.

Спектральные свойства В-сплайнов описываются формулами вида

$$F_{B,m}(\omega) = Ah \left(\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2} \right)^{m+1}, \quad (3)$$

где A – магнитуда В-сплайна; h – расстояние между узлами; ω – частота.

По виду они напоминают функцию $\text{sinc}(t)$ в формуле (1), но главное отличие состоит в том, что выражение в скобках в формуле (3) возводится в целую степень. На рис. 2 приведены графики спектральных плотностей одномерных В-сплайнов 1-й и 3-й степени для положительных значений аргумента, откуда следует, что спектр кубического В-сплайна убывает с большой скоростью при $\omega \rightarrow \infty$.

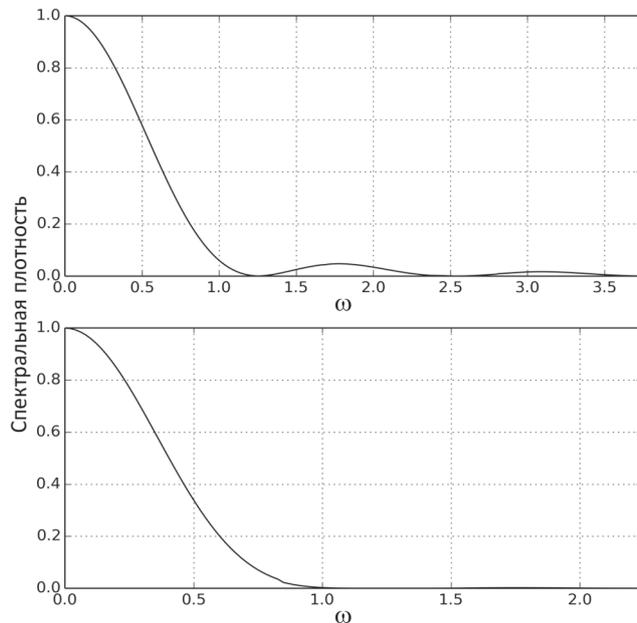


Рис. 2. Графики спектральных плотностей В-сплайнов

В-сплайны образуют естественную систему базисных функций, обладающую собственной решеткой внутренних дискретных узлов интерполяции. Нулевые значения $\omega_c = \pi/h$ могут быть таковыми и для спектральной плотности $F_m(\omega)$ последовательности В-сплайнов, каждый из которых сдвинут по отношению к соседнему элементу базиса на значение шага выборки h . Формула для модуля спектральной плотности $F(\omega)$ последовательностей принимает вид [6]

$$F(\omega) = |F_{B_0}(\omega)| \left| \sum_{i=-m}^{n+m} b_i \exp(-j\omega h) \right|,$$

где B_0 – начальный В-сплайн; b_i – коэффициенты разложения функции по В-сплайнам; j – мнимая единица.

Принципы аналого-цифрового преобразования многомерных сигналов существенно отличаются от таковых при преобразовании одномерных данных. Основные отличия заключаются в том, что при увеличении размерности измеряемых данных значительно возрастает объем числовой информации и усложняются математические методы обработки, вследствие чего, как правило, увеличиваются ошибки преобразования и вычислений.

Во-первых, практически для большинства многомерных сигналов их значения известны только для конечной области носителя, т.е. плоскости или пространства. Наиболее распространена теория Д. Питерсена и Д. Миддлтона [11], которая утверждает, что для повышения точности обработки

многомерных данных нужно использовать не только отсчеты в точках пространства, но и значения градиента поля. Вторая особенность – существование конфигураций решеток дискретизации, более эффективных, чем прямоугольная, например ромбовидные и гексагональные решетки. Эффективность здесь понимается в том смысле, что для полного восстановления информации расстояния между отсчетами можно брать менее частыми, чем при применении прямоугольных решеток. Третий важный момент – идея сохранения принципа финитности многомерного спектра, т.е. ограничения области волновых чисел вокруг начала координат.

Таким образом, из всех возможных конфигураций матриц дискретизации сигналов с финитным спектром преобладают два варианта – применение либо прямоугольных, либо гексагональных решеток. Термин «гексагональные решетки» означает,

что задано соотношение $h_y = h_x \sqrt{3}$ и каждый отсчет

выступает центром некоторой окружности, имея шесть ближайших соседей. Строки раstra повторяются через одну, причем нечетные сдвигаются относительно четных на половину интервала. По существу, гексагональная фигура вписывается в круг (в трехмерном случае – в шар) и требует меньше отсчетов, чем прямоугольная (кубическая). Превращение непрерывного сигнала в последовательность импульсов позволяет решить проблему периодического продолжения сигнала на все пространство носителя, в частности в двумерном случае – на всю плоскость (x, y) . Этот прием ведет, в свою очередь, к необходимости периодического продолжения спектра Фурье также на всю плоскость (или на объем пространства) волновых чисел [3].

Традиционным и наиболее простым способом формирования многомерных выборок сигнала является прямоугольная дискретизация, когда носителями информации на плоскости являются квадраты, прямоугольники, а в пространствах большей размерности – параллелепипеды, гиперкубы и т.п.

Можно доказать, что метод разложения финитных областей пространств по конечным суммам финитных базисных элементов при увеличении количества последних обеспечивает предельно высокую точность восстановления многомерных непрерывных сигналов.

Допустим, что область определения функций нескольких переменных (ФНП) представляет собой N -мерное евклидово пространство R_N , а области носителей функций представляют собой геометрические формы (квадраты, прямоугольники, кубы, параллелепипеды и т.п.). Включение границ превращает их в компактные множества. Пространство вещественных функций, определенных на области

D и удовлетворяющих условию $\iint_D f^2(x, y) dx dy < \infty$,

называется пространством функций, интегрируемых с квадратом, и обозначается $L_2[D]$. Обозначим через x_i и x_{i+1} соответственно начальную и конечную точки произвольного элементарного отрезка с номером i на оси x , а через y_k и y_{k+1} – начальную и конечную точки элементарного отрезка с номером k на оси y . Эти точки определяют координаты вершин элементарных прямоугольников D_{ik} , принадлежащих к области D .

На рис. 3 приведены пространственные графики билинейного и бикубического В-сплайнов (для них степени равны 1 и 3 соответственно).

Многомерные В-сплайны, так же как их спектральные Фурье-отображения, обладают свойством *сепарабельности*, т.е. возможности представления их как ФНП в виде комбинаций функций одной переменной [6]. Запишем, например, разложение функции двух переменных $f(x, y)$ в виде билинейной суммы двумерных В-сплайнов:

$$f(x, y) \cong \sum_{i=-1}^{n_x+1} \sum_{k=-1}^{n_y+1} b_{ik} B_{m,i}(x) B_{m,k}(y),$$

где n_x и n_y – числа отсчетов значений поля по осям x и y соответственно; b_{ik} – b – коэффициенты раз-

ложения функции; $B_{m,i}(x)$, $B_{m,k}(y)$ – одномерные В-сплайны степени m по каждой из координат.

В результате преобразований Фурье двумерных В-сплайнов получаются выражения вида:

$$F_{B_0}(\omega_x, \omega_y) = B_0 h_x h_y \left(\frac{\sin(\omega_x h_x / 2)}{(\omega_x h_x / 2)} \right)^{m+1} \left(\frac{\sin(\omega_y h_y / 2)}{(\omega_y h_y / 2)} \right)^{m+1},$$

где B_0 – магнитуа В-сплайна, расположенного в начале координат, т.е. имеющего индексы по осям $i = 0, k = 0$; h_x и h_y – шаги выборки по аргументам x и y .

Равенство Парсеваля для непрерывных сигналов – функций двух переменных, заданных на компактном носителе, который имеет форму прямоугольника, принимает вид

$$\int_a^b \int_c^d f^2(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (4)$$

Выражение для модуля спектральной плотности двумерной последовательности В-сплайнов описывается двойной суммой [9, 11]:

$$|F_{\Sigma B}(\omega_x, \omega_y)| = |F_{B_0}(\omega_x, \omega_y)| \times \left| \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} b_{ik} \exp(-ji\omega_x h_x) \exp(-jk\omega_y h_y) \right|, \quad (5)$$

где F_{B_0} – спектр В-сплайна с индексами $i = k = 0$; n_x и n_y – количество дискретных отсчетов значений поля по осям x и y соответственно.

Значение спектральной энергии поля P_ω может быть вычислено с высокой степенью приближения по отношению к значению левой части равенства Парсеваля по формуле (4) как двукратный интеграл от модуля спектральной плотности, интерполирующей последовательность (5) на всем квадранте положительных значений волновых чисел (ω_x, ω_y):

$$P_\omega = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |F_{\Sigma B}(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (6)$$

Задача сравнительной оценки плотности сети наблюдений при аэромагнитной съемке

В качестве примера применения метода конечных базисных функций для восстановления пространственных форм по дискретным отсчетам, в том числе для исследования аномалий, приведем задачу измерения магнитных свойств горных пород и руд. Применение этого вида съемки зависит от многих факторов, например, точности измерений, высоты полета, межмаршрутных расстояний и т.д. Обычно предварительно осуществляется аэромагнитная съемка мелкого масштаба (1:200 000) с целью составления карт магнитного поля и последующего выделения перспективных площадей по геологическим и геофизическим признакам [5].

Рассмотрим задачу интерполяции магнитного поля последовательностью двумерных билинейных базисных сплайнов. Возьмем пространственную

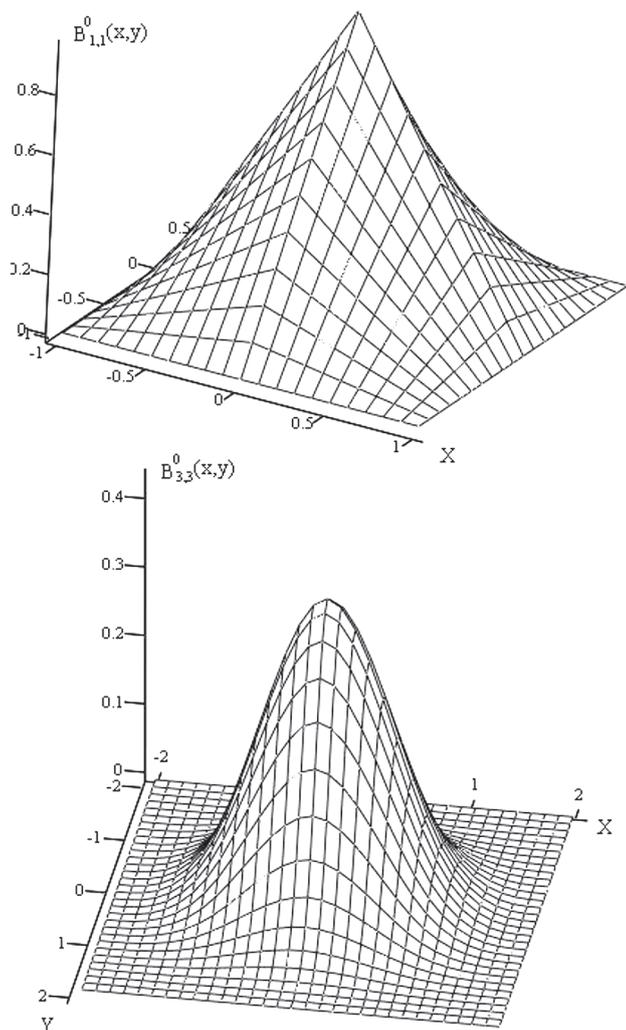


Рис. 3. Графики В-сплайнов

картину поля, построенную по результатам измерений в дискретных точках, которые образуют квадрат размерностью $n_x \times n_y = 300 \times 300$ отсчетов (рис. 4).

Расстояние между соседними отсчетами составляет $h_x = h_y = 0,2$ км. Таким образом площадь элементарного квадрата равна $h_x \times h_y = 0,2 \times 0,2 = 0,04$ км². Выделим внутри поля квадрат размерностью 80×80 элементов. По оси x поля он будет включать отсчеты с номерами с 1 по 81, а по оси y – с номерами с 81 по 161.

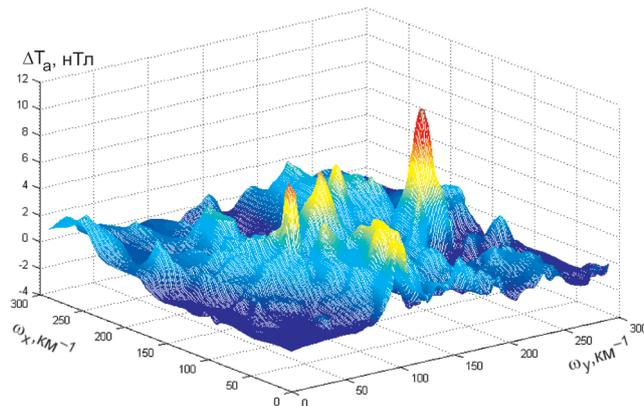


Рис. 4. Пространственный график магнитного поля ΔT_a

Спектральная энергия выделенного участка поля оценивается по формуле (6) с учетом того, что поле является конечным по размерам и его энергия (пространственная или спектральная) конечна. Следовательно, пределы интегрирования квадрата спектральной плотности должны быть конечны:

$$P_\omega = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/h_x} \int_0^{\pi/h_y} |F_{\Sigma B}(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (7)$$

График двумерного спектра последовательности билинейных базисных сплайнов, интерполирующих магнитное поле на выделенном квадрате, приведен на рис. 5.

Полное значение спектральной энергии отсчетов на квадрате, содержащем $80 \times 80 = 1600$ отсчетов, вычисленное на основании теоремы Парсеваля, равно $1,4942415 \cdot 10^3$. Результаты расчетов при различных параметрах выборки приведены в табл. 1.

В результате можно прийти к следующим видам.

1. Предложен метод определения частот дискретных выборок, которые необходимы для восстановления сигналов с точностью до ϵ . Он основан на применении теории сигналов с конечной энергией (функций, интегрируемых с квадратом) и использует разложения одномерных и многомерных сигналов по финитным базисам (сплайны, сплайн-вейвлеты), не требуя финитности спектра. Скорость затухания спектра в области высоких частот или больших значений волновых чисел растет с увеличением степени базисных функций.

2. Приведенный пример дискретизации двумерного геомагнитного поля свидетельствует о возможности распространения метода конечной энер-

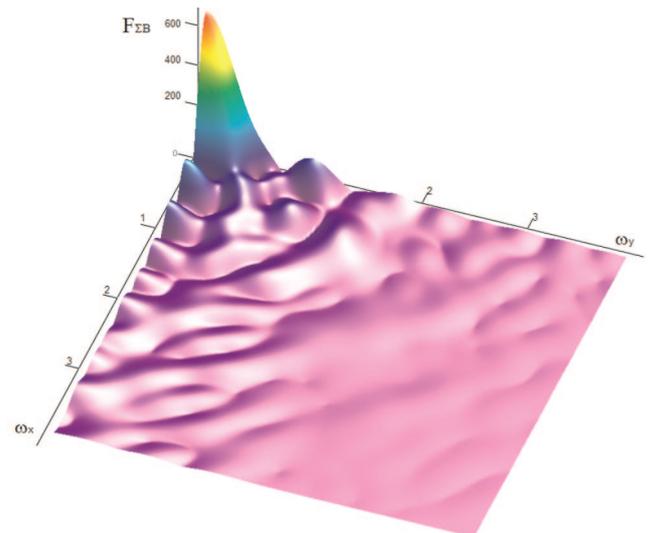


Рис. 5. Пространственный спектр последовательности билинейных В-сплайнов

Таблица 1

Результаты расчетов энергии по взятым последовательно выборкам

| Шаг по оси, км | | Значение энергии спектра суммы отсчетов по формуле (6), усл. ед. | Разность между полной энергией и энергией спектра отсчетов, усл. ед. |
|----------------|-----|--|--|
| x | y | | |
| 0,8 | 0,8 | $1,42320011 \cdot 10^3$ | $0,07104 \cdot 10^3$ |
| 0,4 | 0,4 | $1,4477530 \cdot 10^3$ | $0,04649 \cdot 10^3$ |
| 0,2 | 0,2 | $1,4692972 \cdot 10^3$ | $0,02494 \cdot 10^3$ |

гии на объемы данных большей размерности. Для этого потребуется вычисление, в частности, трехкратных интегралов.

3. Носителями многомерных сигналов с конечной энергией могут служить не только квадраты, кубы, но и прямоугольники, параллелепипеды и т. п.

4. Медленная сходимость энергии совокупности дискретных отсчетов (см. табл. 1) с полной энергией при уменьшении величин шагов объясняется невысокой степенью использованных базисных функций (кусочно-линейные «функции-пагоды»). Для повышения скорости сходимости необходимо перейти к сплайнам и вейвлетам более высоких степеней.

Предварительные оценки применимости метода в задачах электроразведки для различных моделей среды

Рассмотрим возможность применения метода В-сплайнов для восстановления пространственных форм и контрастности проявления поискового объекта по дискретным разномасштабным измерениям на примере выделения аномалий для физико-математической модели, сформированной по результатам плотной пространственно-временной сети наблюдений глубинной электроразведки 3D-ЗСБ

На рис. 6 приведена модель, характеризующаяся неоднородным строением верхней части разреза

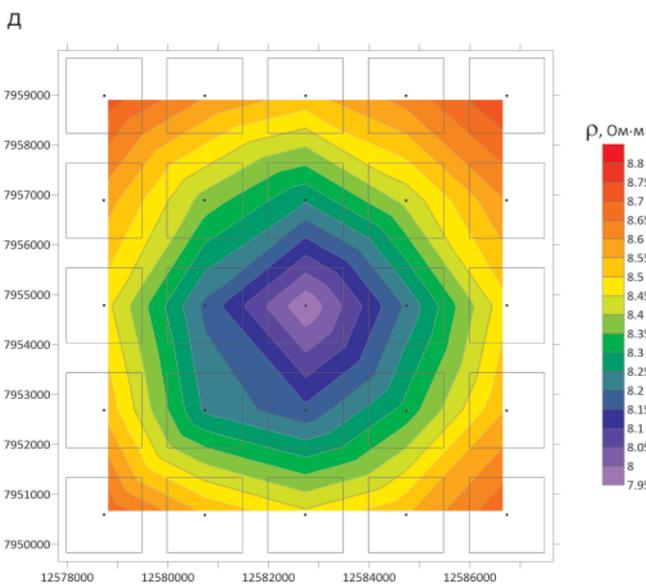
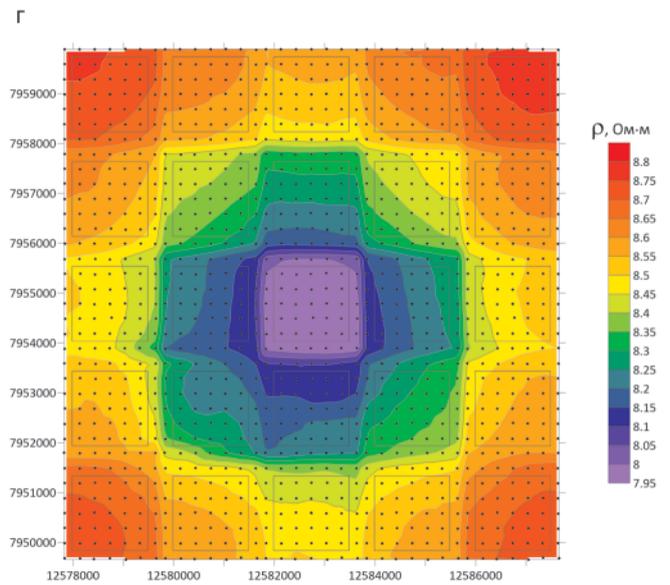
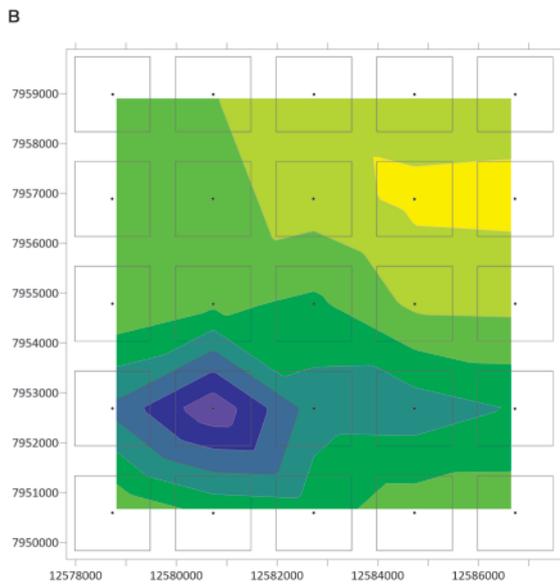
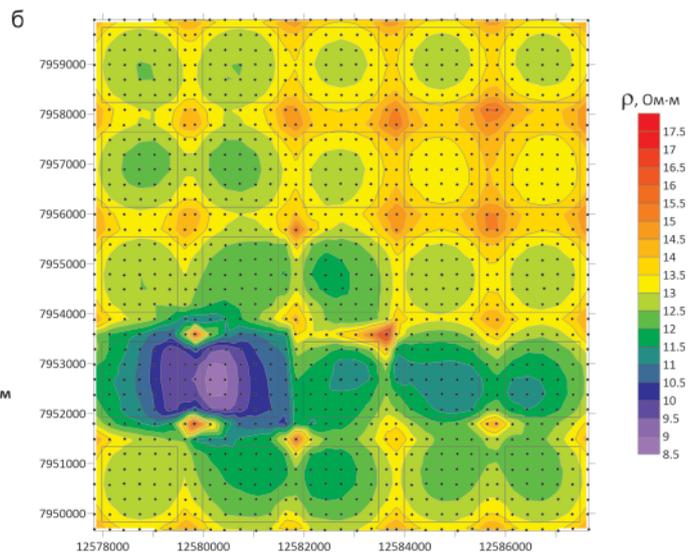
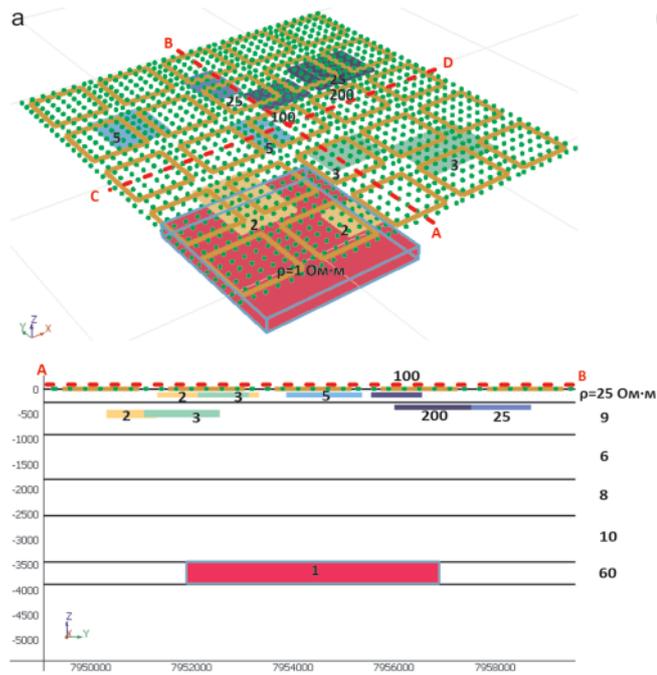


Рис. 6. Оценка сходимости энергии совокупности дискретных отсчетов к полной энергии для модели, сформированной по результатам плотной пространственно-временной сети наблюдений глубинной электроразведки 3D-ЗСБ: а – модельный разрез; б–д – карты кажущегося удельного сопротивления: б – на времени 100 мс с шагом 300 м; в – на времени 100 мс с шагом 2000 м, г – на времени 2000 мс с шагом 300 м, д – на времени 2000 мс с шагом 2000 м

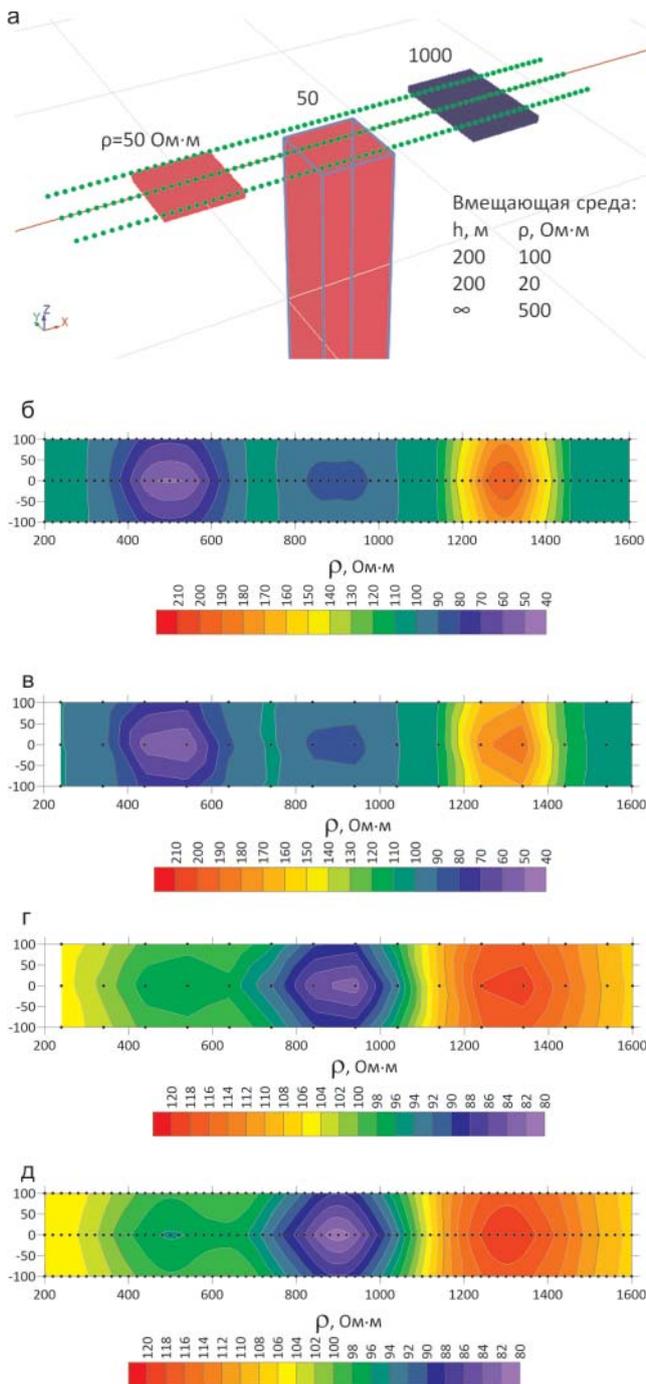


Рис. 7. Оценка сходимости энергии совокупности дискретных отсчетов к полной энергии для модели кимберлитовой трубки: а – модель; б–д – карты кажущегося удельного сопротивления: б – на времени 20 мкс, шаг наблюдений 20 м, в – на времени 20 мкс, шаг наблюдений 100 м, г – на времени 200 мкс, шаг наблюдений 20 м, д – на времени 200 мкс, шаг наблюдений 100 м

до глубины 500 м и поисковым целевым объектом в интервале 3500–4000 м. На рис. 6 приведены планы распределения удельного сопротивления на времени 100 и 2000 мс по данным 1D-интерпретации с шагом съемки 300 м 2000 м.

Рассмотрим влияние шага съемки на вычисляемую энергию (табл. 2).

Как видно из табл. 2, приемлемые результаты получаются при шаге съемки до 2000 м, что визу-

ально подтверждено на площадном распределении электрического сопротивления, изображенного на рис. 6, д.

Рассмотрим физико-математическую модель кимберлитовой трубки, залегающей в горизонтально-слоистой геологической среде с двумя неоднородностями в верхней части разреза (рис. 7).

Таблица 2

Зависимость энергии от шага съемки

| Шаг, км | Е, усл. ед. | Е/Е(0,3),% |
|--------------------|-------------|------------|
| На времени 100 мс | | |
| 0,3 | 1,6455e+010 | – |
| 0,6 | 1,6567e+010 | 0,68 |
| 1 | 1,6812e+010 | 2,17 |
| 12 | 1,8696e+010 | 13,6 |
| На времени 2000 мс | | |
| 0,3 | 7,1340e+09 | – |
| 0,6 | 7,1402e+09 | 0,087 |
| 1 | 7,1176e+09 | 0,23 |
| 2 | 7,1056e+09 | 0,4 |

Таблица 3

Зависимость энергии от шага съемки

| Шаг, км | Е, усл. ед. | Е/Е(0,3),% |
|--------------------|-------------|------------|
| На времени 20 мкс | | |
| 20 | 2,8150e+09 | – |
| 60 | 2,8090e+09 | 0,21 |
| 100 | 2,6189e+09 | 6,7 |
| 200 | 1,9171e+09 | 32 |
| На времени 200 мкс | | |
| 20 | 3,1278e+09 | – |
| 60 | 3,0708e+09 | 1,8 |
| 100 | 2,9867e+09 | 4,5 |
| 200 | 2,8336e+09 | 9,4 |

Как видно из рис. 7 и табл. 3, приемлемые результаты получаются при шаге съемки до 100 м, таким образом, сеть наблюдений по сравнению со стартовым шагом съемки 20 м может быть многократно разрежена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Блаттер К.** Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2006. – 272 с.
- Гребенников А. И.** Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: МГУ, 1983. – 206 с.
- Даджион Д., Мерсеро Р.** Цифровая обработка многомерных сигналов: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
- Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
- Логачев А. А., Захаров В. П.** Магниторазведка. 4-е изд., перераб. и доп. – Л.: Недра, 1973. – 351 с.



6. Свиныин С. Ф. Теория и методы формирования выборок сигналов с инфинитными спектрами. – СПб.: Наука, 2016. – 71 с.

7. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.; Л.: Гостехиздат, 1952. – 192 с.

8. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.

9. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

10. Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Zeitschrift für Physik. – 1927. – Vol. 43, no. 34. – P. 172–198.

11. Petersen D., Middleton D. Sampling and reconstructions of wave-number-limited functions in N-dimensional Euclidean spaces // Information and Control. – 1962. – Vol. 5. – P. 279–323.

12. Whittaker E. On the functions which are represented by Expansions of the Interpolation Theory / Proc. Roy. Soc. – 1915. – Vol. 35. – P. 181–194.

REFERENCES

1. Blatter K. *Veyvlet-analiz. Osnovy teorii* [Wavelet analysis. Fundamentals of the theory]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2006. 272 p. (In Russ.).

2. Grebennikov A.I. *Metod splaynov i reshenie nekorrektnykh zadach teorii priblizheniy* [Spline method and solving incorrect problems of the approximation theory]. Moscow, State University Publ., 1983. 206 p. (In Russ.).

3. Dudgeon D.P., Mersereau R.M. *Tsifrovaya obrabotka mnogomernykh signalov* [Multidimensional

Digital Signal Processing]. Moscow, Mir Publ., 1988. 488 p. (In Russ.).

4. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splayn-funktsiy* [Spline Function Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p. (In Russ.).

5. Logachev A.A., Zakharov V.P. *Magnitorazvedka* [Magnetic exploration]. Leningrad, Nedra Publ., 1973. 351 p. (In Russ.).

6. Svinin S.F. *Teoriya i metody formirovaniya vyborok signalov s infinitnymi spektrami* [Theory and methods of signal sampling with infinite spectra]. Saint Petersburg, Nauka Publ., 2016. 71 p.

7. Kharkevich A.A. *Spektry i analiz* [Spectra and analysis]. M.-L., Gostekhizdat Publ., 1952. 192 c. (In Russ.).

8. Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. *Metody teorii tselykh funktsiy v fizike i tekhnike* [Methods of the theory of entire functions in physics and technology]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 408 p. (In Russ.).

9. Chui Ch. *Vvedenie v veyvlety* [Introduction to Wavelets]. Moscow, Mir Publ., 2001. 412 p. (In Russ.).

10. Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 1927, vol. 43, no. 34, pp. 172–198.

11. Petersen D., Middleton D. Sampling and reconstructions of wave-number-limited functions in N-dimensional Euclidean spaces. *Information and Control*, 1962, vol. 5, pp. 279–323.

12. Whittaker E. On the functions which are represented by expansions of the Interpolation theory. *Proc. Roy. Soc.*, 1915, vol. 35, pp. 181–194.

© С.Ф.Свиныин, Г.М.Тригубович, А.В.Чернышев,
В.Ф.Свиныин, 2019